Minicorso
Stocks Market Trading Analysis

di Andrea Saviano

Parte 4

- Funzioni di perdita e previsione ottima
- Le serie temporali
- Rumore bianco, rosa e nero
- Processi auto regressivi di ordine ***p*** o AR(***p***)
- Processi a media mobile di ordine ***q*** o MA(***q***)

Premessa

Da un punto di vista statistico prevedere significa determinare con il minore errore possibile il valore assunto da una variabile casuale per mezzo del valore assunto di altre variabili casuali. Pertanto il problema si riduce all'opportuna scelta di una **funzione di perdita** (o di costo) in modo da determinare il **previsore ottimo**, cioè la funzione (misurabile) delle variabili osservabili che minimizza la perdita attesa.
Nel prevedere, vi sono situazioni in cui un errore per difetto implica costi molto più alti di un errore per eccesso. Per esempio, si supponga di dovere prevedere la piena di una lago vicino ad una grande città. Quando la piena supera un certo livello, il centro della città viene allagato danneggiando negozi, cantine e abitazioni. Pertanto, il costo di un errore di previsione positivo (realizzazione maggiore della previsione) è piuttosto ingente. Al contrario, quando si prevede per difetto, il costo consiste solamente nell'apertura di alcune chiuse di sfogo, nell'allagamento di bacini e campi, e nella predisposizione di barriere in città.
Nel caso dei mercati finanziari tutto ciò significa che tramite questa o altre metodologie ci si può attendere un valore per il minimo di una determinata azione, tuttavia un errore in eccesso permette comunque l'acquisto, un errore in difetto invece farebbe saltare l'acquisizione. In altre parole, quando si fissa un prezzo per l'acquisto o la vendita può essere opportuno aggiustare tale prezzo con una correzione. In probabilità tutto ciò esprime la confidenza con cui un valore è un valido limite superiore o inferiore del valore atteso.
Premesso tutto ciò il compito dell'analisi storica dei dati è quello di capire la dinamica della serie osservata, ovvero il meccanismo con cui la variabilità s'evolve nel tempo in particolare sia a fini previsionali sia con obiettivi di controllo per rilevare la presenza di "anomalie".

Le serie temporali

Per **serie temporale** (o *time series*) s'intende una successione di valori aleatori ***x*** che cambiano al variare del parametro temporale ***t***. Tale successione viene trattata come una funzione aleatoria.
Data una qualsiasi sequenza temporale di valori, particolare importanza assumono:

- la **media**

$$\mu_t = E(x_t)$$

- la **varianza**

$$\sigma_t^2 = Var(x_t) = E\left[(x_t - \mu)^2\right]$$

- l'**autocovarianza**

$$\gamma(t', t'') = Cov(x_{t'}, x_{t''})$$

- l'**autocorrelazione**

$$\rho(t', t'') = Cor(x_{t'}, x_{t''}) = \frac{Cov(x_{t'}, x_{t''})}{\sigma_{t'} \cdot \sigma_{t''}} = \frac{\gamma(t', t'')}{\sigma_{t'} \cdot \sigma_{t''}}$$

La funzione autocorrelazione globale

La **funzione di autocorrelazione globale** al ritardo $\boldsymbol{k}$ di un processo stazionario $\boldsymbol{x}_t$ (con $\boldsymbol{t}$=1, 2, … , $\boldsymbol{n}$) è definita come:

$$\rho_k = Cor(x_t, x_{t-k}) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \Rightarrow |\rho_k| \le 1$$

Ne deriva che

$$\rho_0 = 1$$

La matrice di autocorrelazione di Toeplitz

Si definisce **matrice di varianza e covarianza o di autocorrelazione di Toeplitz** la matrice simmetrica

$$P_{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

I cui elementi rappresentano l'autocorrelazione tra $\boldsymbol{x}_t$ e $\boldsymbol{x}_{t-k}$ (con $\boldsymbol{k}$=1, 2, … , $\boldsymbol{n}$-1).
Sostituendo l'ultima colonna della matrice $\mathbf{P}_k$ con il vettore {$\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$, … , $\boldsymbol{\rho}_k$} s'ottiene la seguente matrice:

$$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix}$$

La funzione di autocorrelazione parziale

Si definisce funzione di autocorrelazione parziale

$$\phi_{k,k} = \frac{\|Q_k\|}{\|P_k\|}$$

per cui, posto per convenzione $\boldsymbol{\phi}_{0,0}$=1 le successive tre autocorrelazioni sono:

$$\phi_{1,1} = \rho_1$$

$$\phi_{2,2} = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{Vmatrix}}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\begin{Vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{Vmatrix}}$$

e così via.

Stazionarietà

Un processo stocastico è detto stazionario

- **in senso forte** se per qualsiasi $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{t}_1$, ... e $\boldsymbol{t}_k$ (tutti interi) la distribuzione di probabilità di $(\boldsymbol{x}_{t_1}, \dots, \boldsymbol{x}_{t_k})$ è uguale alla distribuzione di probabilità di $(\boldsymbol{x}_{t_{1+h}}, \dots, \boldsymbol{x}_{t_{k+h}})$;
- **in senso debole** se per qualsiasi $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{t}'$ e $\boldsymbol{t}''$ (interi)

$$E(x_{t'}) = E(x_{t''})$$
$$Var(x_{t'}) = Var(x_{t''})$$
$$Cov(x_{t'}, x_{t''}) = Cov(x_{t'+h}, x_{t''+h})$$

Si osservi che la prima definizione implica la seconda (almeno se i momenti coinvolti esistono).
Ne deriva che, se un processo è stazionario,

- la media e la varianza non variano con il tempo;
- le covarianze (e quindi le autocorrelazioni) è solo funzione della distanza nel tempo tra le due variabili casuali coinvolte.

Scomposizione di una serie temporale in componenti elementari

Molte serie temporali contengono evidenti segni di non stazionarietà (in particolare in posizione e dispersione). Per non perdere i vantaggi assicurati dalla stazionarietà, è abbastanza comune cercare di trasformare la serie originale in una serie stazionaria. Ovviamente, la strada più semplice per realizzare ciò consiste nello stimare la parte non stazionaria della serie osservata per poi rimuoverla.
Difatti, è usuale che una serie storica venga scomposta nelle sue varie componenti. In particolare risultano spesso evidenti:

- un **trend**, cioè una componente $\mathbf{T}_t$ (anche non lineare) che varia lentamente nel tempo e che determina una crescita o una abbassamento del livello della serie;
- una **ciclicità o stagionalità**, cioè la presenza di una o più componenti periodiche $\mathbf{S}_t$ che si ritrovano uguali o quasi a distanza fissa nel tempo, le più semplici sono:
    - serie mensili ogni 12 mesi,
    - serie trimestrali ogni 4 trimestri,
    - serie giornaliere ogni 7 giorni.
- una **componente irregolare o erratica**, cioè la presenza di oscillazioni random $\mathbf{I}_t$ di breve periodo che normalmente possono essere assimilate a un processo stocastico stazionario.

Nella logica che la non stazionarietà sia dovuta all'azione di forze (causa-effetto), se si considera il mercato finanziario è facile pensare che:

- l'inflazione introduca un trend $\mathbf{T}_t$ di rivalutazione,
- i trimestrali, l'approvazione del bilancio e lo stacco dei dividendi oltre ad altri dati legati all'andamento economico introducano certamente delle ciclicità $\mathbf{S}_t$,

Rumore bianco, rosa e nero

Il più semplice processo puramente casuale è il **rumore bianco** (o *white noise*), il quale è così definito:

$$\varepsilon_t = N(0;\sigma_\varepsilon) \Leftrightarrow \begin{cases} E(\varepsilon_t) = 0 \\ Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty \end{cases}$$
$$Cov(\varepsilon_{t'};\varepsilon_{t''}) = 0$$

Questo processo è chiamato rumore bianco perché la sua scomposizione spettrale è come quella della luce bianca, la quale ha un'intensità costante a tutte le frequenze angolari.
La condizione di varianza finita e costante è chiamata **emoschetasticità**, mentre la condizione di varianza non costante è detta **eteroschedasticità**.

Processi auto regressivi di ordine p o AR(p)

Consideriamo una serie temporale di dati $\boldsymbol{x}_i$ e supponiamo di voler stimare al tempo $\boldsymbol{t}$ il valore che $\boldsymbol{x}$ assume correlandolo ai $\boldsymbol{p}$ valori precedenti tramite una relazione del tipo:

$$x_t = \varepsilon_t + a_1 \cdot x_{t-1} + a_2 \cdot x_{t-2} + \ldots + a_p \cdot x_{t-p} = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot x_{t-i}$$

dove $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ è il cosiddetto rumore bianco, cioè un processo a distribuzione normale avente media nulla e scarto quadratico $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ scorrelato dai valori assunti da $\boldsymbol{x}_i$ (con i=1, 2, … , $\boldsymbol{p}$). Pertanto, un processo AR($\boldsymbol{p}$) risulta pienamente definito da $\boldsymbol{p}$ parametri $\boldsymbol{a}_i$ più il rumore bianco $\boldsymbol{\varepsilon}_t$.

Processi a media mobile di ordine q o MA(q)